**XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА**

**Решения заданий заключительного этапа, 1 день**

**1**. *Можно ли пронумеровать вершины, рёбра и грани куба различными целыми числами от –12 до 13 так, чтобы номер каждой вершины равнялся сумме номеров сходящихся в ней рёбер, а номер каждой грани равнялся сумме номеров ограничивающих её рёбер?* (И. Рубанов)

**Ответ**. Нельзя. **Решение**. Сложим все присвоенные номера, заменив номера вершин и граней суммами номеров граничащих с ними рёбер. Тогда номер каждого ребра будет входить в полученную сумму пять раз: сам по себе, в составе номеров двух своих концов и в составе номеров двух граней, в которых лежит ребро. Следовательно, если бы искомая нумерация была возможна, сумма всех номеров должна была бы делиться на 5. Но она равна 13.

**2**. *У царя Гиерона есть 13 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, ..., 13 кг. Ещё у него есть прибор, в который можно положить один или несколько из имеющихся 13 слитков, и он просигналит, если их суммарный вес равен ровно 46 кг. Архимед, знающий веса всех слитков, хочет написать на двух слитках их веса и за два использования прибора доказать Гиерону, что обе надписи правильны. Как действовать Архимеду?* (К. Кноп)

**Решение**. Пусть Архимед сначала положит в прибор четыре самых тяжёлых слитка. Их суммарный вес — 10+11+12+13 = 46 кг, и прибор сработает. Других четвёрок слитков общим весом 46 кг у Архимеда нет. Значит, он показал Гиерону, какие четыре слитка — самые тяжёлые. Затем он положит в прибор 9 слитков весами 1, …, 8 кг и 10 кг. Прибор снова сработает. Поскольку, как легко видеть, других девяток слитков общим весом 46 кг у Архимеда нет, он показал Гиерону, каков набор из восьми самых лёгких слитков и слитка весом 10 кг. При этом оба раза в прибор клали ровно один слиток в 10 кг, а ни разу не клали ровно один слиток в 9 кг. Поэтому Архимеду достаточно было написать веса на слитках в 9 и 10 кг.

**3**. *На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. На стороне AB выбрана точка P. Отрезки PC и AD пересекаются в точке Q. Точка R — середина отрезка AP. Докажите, что существует фиксированная точка X, через которую прямая RQ проходит при любом выборе точки P.* (А. Кузнецов)

**Решение**. Проведем через точку *C* прямую, параллельную прямой *AB*, и пусть *E* — точка ее пересечения с прямой *AD*. Искомая точка *X* — это середина отрезка *CE*. В самом деле, точки *R*, *Q* и *X* лежат на одной прямой при любом выборе точки *P* как середины сторон и точка пересечения диагоналей трапеции *APEC*.

**4**. *Натуральные числа a, b и c, большие 2022, таковы, что a+b делится на
c–2022, a+c делится на b–2022, b+c делится на a–2022. Какое наибольшее значение может принимать число a+b+c?* (С. Берлов)

**Ответ**. 2022⋅85. **Решение**. *Лемма*. Для любых натуральных *d*1, *d*2, *d*3 если 1/*d*1+1/*d*2+1/*d*3 < 1, то 1–(1/*d*1+1/*d*2+1/*d*3) ≥ 1/42. *Доказательство*. Пусть *d*1 ≤ *d*2 ≤ *d*3 и *d* = 1/*d*1+1/*d*2+1/*d*3. Если *d*1 > 2, то *d* не превосходит 1/3+1/3+1/4 = 11/12. Если *d*1 = 2 и *d*2 > 3, то *d* не превосходит 1/2+1/4+1/5 = 19/20. Наконец, если *d*1 = 2 и *d*2 =3, то *d* не превосходит 1/2+1/3+1/7 = 41/42.

Рассмотрим число *N* = *a*+*b*+*c*–2022. Оно кратно *a*–2022, *b*–2022 и *с*–2022. Пусть *d*1 = *N*/(*a*–2022), *d*2 = *N*/(*b*–2022), *d*3 = *N*/(*c*–2022). Тогда *N*/*d*1+*N*/*d*2+*N*/*d*3 = *N*–4044, откуда 1/*d*1+1/*d*2+1/*d*3 = 1–4044/*N*. По лемме 4044/*N* ≥ 1/42, т. е. *N* ≤ 2022⋅84, откуда *a*+*b*+*c* = *N*+2022 ≤ 2022⋅85. Примеры получаются, если взять *N* = 2022⋅84: *a*–2022 = *N*/2 Þ *a* = 2022⋅43; *b*–2022 = *N*/3 Þ *b* = 2022⋅29; *c*–2022 = *N*/7 Þ *c* = 2022⋅13.